ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS § INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX I977

Concours 2ème année Mathématiques (4 h)

I Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + \alpha t = 1 \\ x + y + \alpha z + t = \lambda \\ x + \alpha y + z + t = \lambda^2 \\ \alpha x + y + z + t = \lambda^3 \end{cases}$$

où $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et discuter suivant les valeurs de α et de λ.

II Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $O\vec{i}\,\vec{j}$, on considère le domaine D défini par :

$$M(x,y) \in D \iff \begin{cases} x^2+y^2 \geqslant a^2 & a \in \mathbb{R} \\ x^2+y^2-2ax \leq 0 & a>0 \end{cases}$$

1° Calculer

a) $\iint_D dx\,dy$

b) $\iint_D x\,dx\,dy$

c) $\iint_D x^2\,dx\,dy$

2°) On considère une plaque plane homogène P délimitée par le domaine D.

Calculer :

a) les coordonnées du centre d'inertie de P

b) le moment d'inertie de P par rapport à l'axe oy.

III On considère l'integrale suivante, où n est entier $\geqslant 0$ et ν réel.

$$I(n,\nu) = \int_0^{2\pi} \sin^n\theta\, e^{i\nu\theta}\, d\theta$$

1°) Calculer $I(0,\nu)$ et $I(1,\nu)$

2°) Prouver la relation suivante :

$$\left[(n+2)^2 - \nu^2\right] I(n+2,\nu) = (n+1)(n+2)\, I(n,\nu)$$

3°) Pour ν entier, calculer directement $I(n,\nu)$ en

.../...

xI82x

utilisant la relation :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4°) Soit ν un nombre réel ; on considère la fonction f_ν de la variable complexe x définie par la formule suivante :

$$f_\nu(x) = \int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta + \nu\theta)}\, d\theta$$

Développer $e^{i(x\sin\theta + \nu\theta)}$ en série entière suivant les puissances de x. En déduire un développement en série entière de $f_\nu(x)$. Montrer que ce développement est valable pour toute valeur complexe de x.

5°) On pose

$$D_\nu f_\nu = \frac{d^2 f_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{df_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f_\nu$$

Montrer que $D_\nu f_\nu$ est une fonction élémentaire de x et ν que l'on calculera. Montrer, en particulier, que $D_\nu f_\nu = 0$ lorsque ν est entier.

IV 1°) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta = \frac{x\cos\theta - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta = \frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

En déduire la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\cos\theta - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \cos n\theta\, d\theta \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \sin n\theta\, d\theta$$

2°) Développer en série de Fourier, les fonctions

a) $f(\theta) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ $\qquad |x| < 1$

(Log désigne le logarithme népérien)

b) $g(\theta) = \mathrm{Arctg}\,\dfrac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta}$ $\qquad |x| < 1$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail